ΘΕΜΑ Α.

Α1. Θεωρία Σελ 234 Σχολικό.

Α2. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος (**Σχόλιο:** Έχει πρόβλημα αφού για α=β είναι σωστή η πρόταση.)

ε) Σωστό

Α3. α) $\int_a^\beta \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_a^\beta = -\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu a$

β) Είναι $(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x)$

γ) Είναι $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \alpha^2 x + \ln x = \alpha^2 + \ln 1 = \alpha^2$

Β2. Είναι,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{\sqrt{x+3}-2}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\sqrt{x+3}^2 - 2^2} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4} = \lim_{x\to 1^+} x\left(\sqrt{x+3}+2\right) = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

Β3. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 1$. Θα πρέπει

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow a = \pm 2$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1.

Μισθός (εκατοντάδες ευρώ) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i\cdot\nu_i$
6	25	50%	150
10	17	34%	170
15	6	12%	90
20	2	4%	40
Σύνολα	ν=50	100%	450

Δικαιολόγηση

Το μέγεθος του δείγματος ισούται με $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=25+17+6+2=50$ υπάλληλοι.

Η σχετική συχνότητα $f_i\%$ δίνεται από τη σχέση $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100\%$. Άρα

$f_1\%=\frac{\nu_1}{\nu}\cdot 100\%=\frac{25}{50}\cdot 100\%=50\%$, $f_2\%=\frac{\nu_2}{\nu}\cdot 100\%=\frac{17}{50}\cdot 100\%=34\%$,

$f_3\%=\frac{\nu_3}{\nu}\cdot 100\%=\frac{6}{50}\cdot 100\%=12\%$, $f_4\%=\frac{\nu_4}{\nu}\cdot 100\%=\frac{4}{50}\cdot 100\%=4\%$.

Τέλος $x_1\cdot\nu_1=6\cdot 25=150$, $x_2\cdot\nu_2=10\cdot 17=170$, $x_3\cdot\nu_3=15\cdot 6=90$, $x_4\cdot\nu_4=20\cdot 2=40$ με σύνολο $150+170+90+40=450$.

Γ2. Η μέση τιμή ισούται με $\bar{x}=\frac{450}{50}=9$ δηλαδή η μέση τιμή των μισθών των υπαλλήλων είναι 900 ευρώ.

Γ3. Το πολύ 1000 ευρώ έχουν μισθό όσοι παίρνουν έως και 1000 ευρώ. Το ποσοστό των υπαλλήλων είναι $f_1\%+f_2\%=50\%+34\%=84\%$ των υπαλλήλων.

Γ4. Η διακύμανση των μισθών των υπαλλήλων ισούται με

$$s^2=\frac{\nu_1(\bar{x}-x_1)^2+\nu_2(\bar{x}-x_2)^2+\nu_3(\bar{x}-x_3)^2+\nu_4(\bar{x}-x_4)^2}{\nu}=$$

$$\frac{25(9-6)^2+17(9-10)^2+6(9-15)^2+2(9-20)^2}{50}=\frac{25\cdot 9+17+6\cdot 36+2\cdot 121}{50}=$$

$$=\frac{225+17+216+242}{50}=\frac{700}{50}=14$$

Άρα η διακύμανση ισούται με 1400 Ευρώ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$$f'(x)=\left[(x-2)^2(x+a)\right]'=\left[(x-2)^2\right]'(x+a)+(x-2)^2(x+a)'=$$

$$=2(x-2)(x-2)'(x+a)+(x-2)^2=2(x-2)(x+a)+(x-2)^2=$$

$$=(x-2)\left[2(x+a)+x-2\right]=(x-2)(2x+2a+x-2)=(x-2)(3x+2a-2)$$

Δ2. Αφού η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$ σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(4)=0\Leftrightarrow 2\cdot(12+2a-2)=0\Leftrightarrow 12+2a-2=0\Leftrightarrow a=-\frac{10}{2}\Leftrightarrow a=-5$

Σχόλιο: Δεν χρειάζεται επαλήθευση.

Δ3. Αφού $\alpha=-5$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $f(x)=(x-2)^2(x-5)$ με παράγωγο $f'(x)=(x-2)(3x-12)$.

Λύνουμε την εξίσωση,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-12)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ ή } 3x-12=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=4.$$

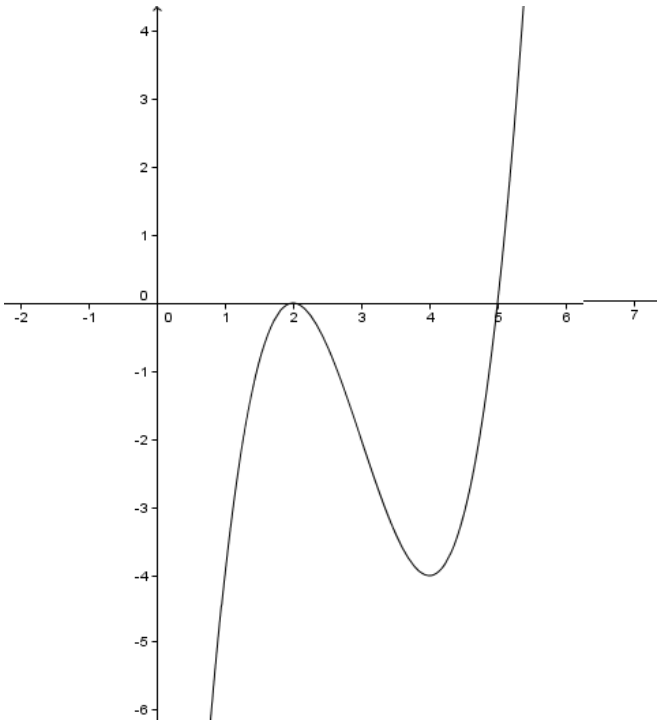
Φτιάχνουμε τον πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης f.

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$x-2$	-	0	+		+
$3x-12$	-		-	0	+
$f'(x)=3x^2-18x+24$	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗
		τ.μ		τ.ε	

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\infty,2]$ και στο $[4,+\infty]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,4]$.

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0=4$ ίσο με $f(4)=-4$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0=2$ ίσο με $f(2)=0$.

Όλα αυτά φαίνονται και στο γράφημα που ακολουθεί:



Σχόλιο. Προσοχή: Δε χρειάζεται να δοθεί η γραφική παράσταση.

Δ4. Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ για να βρούμε τα σημεία τομής (εφόσον υπάρχουν) των C_f, C_g.

Επομένως,

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x^2-12x=6x-24 \Leftrightarrow 3x^2-12x-6x+24=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+24=0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=4$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι,

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_2^4 \left| f(x)-g(x) \right| dx=\int_2^4 \left| 3x^2-18x+24 \right| dx=-\int_2^4 \left(3x^2-18x+24\right) dx=-\left(\left[\frac{3x^3}{3}\right]_2^4-\left[\frac{18x^2}{2}\right]_2^4+24\left[x\right]_2^4\right)$$

$$=-\left(\left[x^3\right]_2^4-9\left[x^2\right]_2^4+24\left[x\right]_2^4\right)=-64+8+1444-36-96+48=4 \ \textit{τετραγωνικές μονάδες}$$

Παρατήρηση

Είναι $\left|x^2-6x+8\right|=-\left(x^2-6x+8\right)$ διότι $x^2-6x+8<0$ στο διάστημα $(2,4)$ (Βλέπε στο πίνακα μονοτονίας της f το πρόσημο της f').